

Weitere Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$

Satz 23.8 : Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

$$(i) \quad \mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) : B_i \text{ abgeschlossene Kugel}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\}.$$

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz,
 also $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
 für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $L \geq 0$. Dann
 ist

$$\mathcal{L}^n(f(A)) \leq L \mathcal{L}^n(A).$$

(Konvention : $0 \cdot \infty = 0$)

(iii) Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Tx :=$

$x_0 + Sx$, mit $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ -238-
orthogonal. Dann ist

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = \mathcal{L}^n(A).$$

(iv) Ist $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, so

gilt

$$\boxed{\mathcal{L}^n(L(A)) = |\det L| \mathcal{L}^n(A)}$$

($0 \cdot \infty = 0$)

(v) $A \subset \mathbb{R}^n$ m -dimensionale Untermfkt,
 $m < n \Rightarrow \mathcal{L}^n(A) = 0$;

speziell:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\text{offene Kugel}) &= \\ \mathcal{L}^n(\text{abgeschlossene Kugel}) \end{aligned}}$$

Bem: (ii) zeigt den Vorteil
des äußeren Maßes: Würde man $\mathcal{L}^n$
 nur auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erklären, so müssten
 wir $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zeigen – sonst
 macht $\mathcal{L}^n(\varphi(A))$ keinen Sinn!

Satz 23.8 benötigt ein

Lemma: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und be-
schränkt. Dann gibt es abzählbar

viele, paarweise disjunkte abgeschlossene

Kugeln $B_i \subset U$ mit

$$\mathcal{L}^n(U) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i).$$

Bem. zum Lemma: Es wird nicht -240-

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

behauptet, der "Rest"

$$U - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

muss nicht leer sein, hat aber Maß 0.

Beweis Lemma: aufwendig $\rightarrow$ Skript

Beweis von Satz 23.8:

(i) für $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ klar;

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt

$\Rightarrow$ $\exists$ disjunkte, abgeschlossene
Lemma

Kugeln $B_i \subset A$ mit

-241-

$$\mathcal{L}^n(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^n\left(A - \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}_{=: Q}\right) = 0;$$

Def $\mathcal{L}^n + \text{Bem}$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow \exists$ Würfel W_j

mit

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_j) < \varepsilon;$$

sei B_j^* die abgeschlossene Umkugel
von $W_j \Rightarrow$

$$\mathcal{L}^n(B_j^*) = c(n) \mathcal{L}^n(W_j);$$

↑
Begründung!

$\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{B_j^*\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist dann

Kugelüberdeckung von A mit

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_j^*)$$

$$\leq \mathcal{L}^n(A) + c(n) \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Beh. für offene u. beschränkte A .

beliebige Mengen A (mit $\mathcal{L}^n(A) < \infty$):

überdecke $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ mit offenen

Quadraten Q_i , so dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^n(A),$$

und benutze dann den 1^{ten} Beweis-
teil für Q_i .

(ii) O.E. wieder $\mathcal{L}^n(A) < \infty$;

Lipschitz - Bedingung $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(B_{r_i}(x_i)) \subset B_{L \cdot r_i}(\varphi(x_i)) \\ \text{für Kugeln } B_{r_i}(x_i); \end{array} \right.$$

Sei $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i) \Rightarrow$

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{L \cdot r_i}(\varphi(x_i)) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^n(\varphi(A)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{L \cdot r_i}(\varphi(x_i)))$$

$$= L^n \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_i}(x_i))$$

Wegen Homogenität und Translationsinvarianz. Nun benutze (i) für A.

(iii) es gilt $|Tx - Ty| = |x - y|$

$$\xRightarrow[\text{"L=1"}]{(ii)} \mathcal{L}^n(TA) \leq \mathcal{L}^n(A);$$

nun ist auch $|T^{-1}x - T^{-1}y| = |x - y|$

$$\xRightarrow[\text{"L=1"}]{(ii)} \mathcal{L}^n(T^{-1}(TA)) \leq \mathcal{L}^n(TA).$$

(iv) Sei $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear $\implies$

$$L = O_1 \circ O_2 \text{ mit}$$

O_1, O_2 orthogonal

und

Polar-
Zerlegung :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^n(L(A)) = \mathcal{L}^n(O_1(DO_2(A)))$$

$$\stackrel{(iii)}{=} \mathcal{L}^n(DO_2(A)) = |d_1 \dots d_n| \mathcal{L}^n(O_2(A))$$

$\nwarrow$ Satz 23.6 (v)

$$\stackrel{(iii)}{=} |d_1 \dots d_n| \mathcal{L}^n(A) = |\det L| \mathcal{L}^n(A)$$

$\rightarrow$ p. 245a

(v) Sei etwa $\boxed{\dim M = n-1}$

(~~Hyper~~fläch), kleinere Dimensionen

analog. Es reicht zu zeigen:

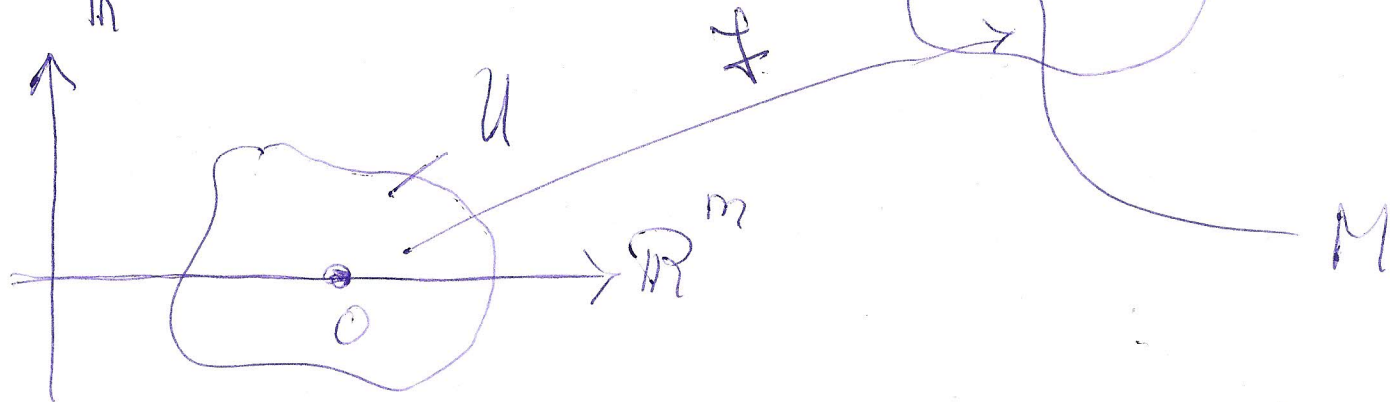
$X_0 \in M$ hat eine Umgebung V

(v) Kurz:

$\mathbb{R}^{n-m}$

$$m < n$$

$\mathbb{R}^n$ -245-



$$M \cap V = f(U \cap \mathbb{R}^m \times \{0\})$$

$= \mathcal{L}^n$ -Nullmenge

($f: U \rightarrow V$ Diffeom.)

o. E. f Lipschitz $\implies$
(ii)

$M \cap V$ $\mathcal{L}^n$ -Nullmenge

in $\mathbb{R}^n$ mit

$$\mathcal{L}^n(M_n V) = 0,$$

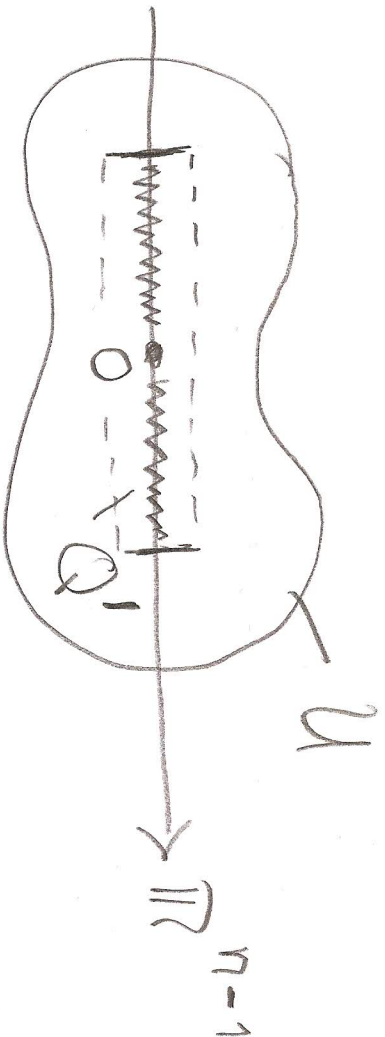
denn $M = \bigcup_{i \in I} (M_n V_i)$ mit

passenden Umgebungen V_i von höchstens abzählbar vielen Punkten $x_i \in M$.

Per Def. gibt es eine offene Umgebung $\widetilde{V}$ von x_0 , eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von 0 und einen Diffeomorphismus

$$\begin{cases} \varphi: \mathcal{U} \rightarrow \widetilde{V}, & \varphi(0) = x_0, \\ \varphi(\mathcal{U}_n(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})) = \widetilde{V}_n M. \end{cases}$$

O. E. sei φ Lipschitz auf $\mathcal{U}$.



Sei $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein "kleiner" Quadrat
 um 0 und $\varepsilon > 0$ so, dass

$\left\{ Q' \times [-\varepsilon, \varepsilon] \right\}$ kompakt
 in U liegt

Sei $\varphi := f(Q' \times [-\varepsilon, \varepsilon])$

$\Rightarrow M \cap V = f(Q' \times \{0\})$ und

$$\mathcal{L}^n(M \cap V) \leq \mathcal{L}^n_p(f) \underbrace{\mathcal{L}^n(Q' \times \{0\})}_{=0} = 0$$

